解答用紙の選択科目名に「数学」と記入し，選択科目マーク欄の数学をマークしてから解答してください．数学の解答は解答用紙の解答欄 (1)〜(123) にマークしてください．

数学 I

(1) 正の整数 m と n の最大公約数を効率良く求めるには，m を n で割ったときの余りを r としたとき，m と n の最大公約数と n と r の最大公約数が等しいことを用いるとよい．たとえば，455 と 208 の場合，次のように余りを求める計算を 3 回行うことで最大公約数 13 を求めることができる．

$$455 \div 208 = 2 \ \cdots \ 39\,, \qquad 208 \div 39 = 5 \ \cdots \ 13\,, \qquad 39 \div 13 = 3 \ \cdots \ 0$$

このように余りを求める計算をして最大公約数を求める方法をユークリッドの互除法という．

(a) 20711 と 15151 のような大きな数の場合であっても，ユークリッドの互除法を用いることで，最大公約数が $\boxed{(1)}\boxed{(2)}\boxed{(3)}$ であることを比較的簡単に求めることができる．

(b) 100 以下の正の整数 m と n (ただし $m > n$ とする) の最大公約数をユークリッドの互除法を用いて求めるとき，余りを求める計算の回数が最も多く必要になるのは，$m = \boxed{(4)}\boxed{(5)}$，$n = \boxed{(6)}\boxed{(7)}$ のときである．

(2) 正の整数 m と n は，不等式 $\dfrac{2022}{2023} < \dfrac{m}{n} < \dfrac{2023}{2024}$ を満たしている．このような分数 $\dfrac{m}{n}$ の中で n が最小のものは，$\dfrac{\boxed{(8)}\boxed{(9)}\boxed{(10)}\boxed{(11)}}{\boxed{(12)}\boxed{(13)}\boxed{(14)}\boxed{(15)}}$ である．

環

数学 II

関数 $f(x)$ と $g(x)$ が

$$f(x) = -x^2 \int_0^1 f(t)\,dt - 12\,x + \frac{2}{9}\int_{-1}^0 f(t)\,dt$$

$$g(x) = \int_0^1 (\,3\,x^2 + t\,)\,g(t)\,dt - \frac{3}{4}$$

を満たしている．このとき

$$f(x) = \boxed{(16)}\boxed{(17)}\;x^2 - 12\,x + \boxed{(18)}\boxed{(19)}$$

$$g(x) = \boxed{(20)}\boxed{(21)}\;x^2 + \boxed{(22)}\boxed{(23)}$$

である．また，xy 平面上の $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフの共通接線は

$$y = \boxed{(24)}\boxed{(25)}\;x + \frac{\boxed{(26)}\boxed{(27)}\boxed{(28)}}{\boxed{(29)}\boxed{(30)}\boxed{(31)}}$$

である．なお，n を 0 または正の整数としたとき，x^n の不定積分は $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + C$ (C は積分定数) である．

数学Ⅲ

(1) 図1の9つのマスに，縦，横，斜めにならんだ3つの数の積がいずれも等しくなるように，相異なる正の整数を1つずつ割り当てる．ただし，4と9は図1のように割り振られており，$\boxed{(32)}\boxed{(33)} < \boxed{(34)}\boxed{(35)}$ となっているものとする．

$\boxed{(32)}\boxed{(33)}$		
9	$\boxed{(36)}\boxed{(37)}$	4
$\boxed{(34)}\boxed{(35)}$		

図1

$\boxed{(32)}\boxed{(33)}$ と $\boxed{(34)}\boxed{(35)}$ と $\boxed{(36)}\boxed{(37)}$ に入る数を求めなさい．

(2) まず，図2の9つのマスに，縦，横，斜めにならんだ3つの数の和がいずれも等しくなるように，相異なる1～9の正の整数を1つずつ割り当てる．複数の割り当て方が考えられるが，その1つを選び割り当てるものとする．

a	d	g
b	e	h
c	f	i

図2

$\Longrightarrow$

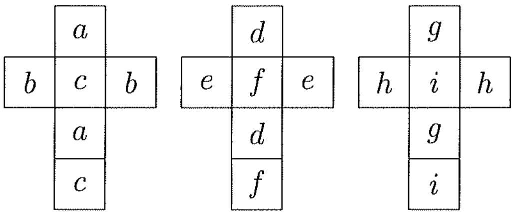


図3

$\Longrightarrow$

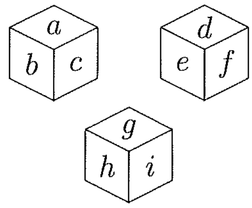


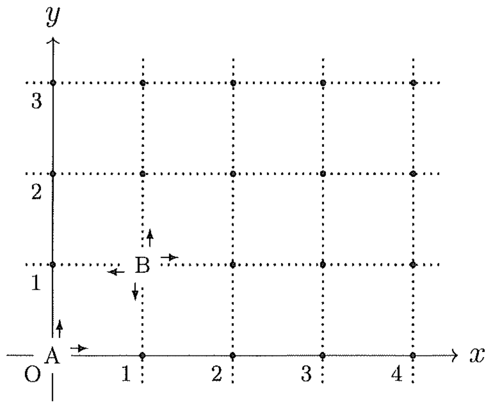
図4

この9つの数を，図3に示すように3つのサイコロの展開図に書き写し，図4のように3つのサイコロを作成する．サイコロは，振ると等しい確率で目 (書き写した数) が出るものとする．

いま，2人のプレーヤーが3つのサイコロから異なるものを1つずつ選び，そのサイコロを振り，出た目が大きいほうが勝つとする．あなたの対戦相手が9を含むサイコロを選んだとき，あなたがこのゲームに，より高確率に勝つために選ぶべきサイコロは，$\boxed{(38)}$ を含むサイコロである．

数学Ⅳ

xy 平面上で x 座標も y 座標も整数である点を格子点という．この格子点上を，次のように点Aと点Bが移動する．



・点Aは，時刻 $t=0$ において原点Oにあり，時刻 t が1増えるごとに，x 軸正方向に1あるいは y 軸正方向に1のいずれかに等確率 $\dfrac{1}{2}$ で移動する．

・点Bは，時刻 $t=0$ において点 $(1,1)$ にあり，時刻 t が1増えるごとに，x 軸正方向に1あるいは x 軸負方向に1あるいは y 軸正方向に1あるいは y 軸負方向に1のいずれかに等確率 $\dfrac{1}{4}$ で移動する．

ここで，時刻 $t=k$ $(k=0,1,2,3,\ldots)$ 以前に点Aと点Bが一度も接触しない (同じ時刻に同じ座標を取らない) 確率を $P(k)$ とする．

(1) $k=0,1,2$ のとき

$$P(0)=1\,,\qquad P(1)=\frac{\boxed{(39)}\boxed{(40)}}{\boxed{(41)}\boxed{(42)}}\,,\qquad P(2)=\frac{\boxed{(43)}\boxed{(44)}}{\boxed{(45)}\boxed{(46)}}$$

である．

(2) $k=3$ のとき

(a) 点Aが点 $(1,0)$ と点 $(2,0)$ を経由して点 $(3,0)$ に移動する場合，$t=3$ で初めて点Aと点Bが接触するような点Bの移動パターンは $\boxed{(47)}\boxed{(48)}$ 通り，$t=3$ より前に点Aと点Bが少なくとも一度は接触するような点Bの移動パターンは $\boxed{(49)}\boxed{(50)}$ 通り，

(b) 点Aが点 $(1,0)$ と点 $(2,0)$ を経由して点 $(2,1)$ に移動する場合，$t=3$ で初めて点Aと点Bが接触するような点Bの移動パターンは $\boxed{(51)}\boxed{(52)}$ 通り，$t=3$ より前に点Aと点Bが少なくとも一度は接触するような点Bの移動パターンは $\boxed{(53)}\boxed{(54)}$ 通り，

(c) 点Aが点 $(1,0)$ と点 $(1,1)$ を経由して点 $(2,1)$ に移動する場合，$t=3$ で初めて点Aと点Bが接触するような点Bの移動パターンは $\boxed{(55)}\boxed{(56)}$ 通り，$t=3$ より前に点Aと点Bが少なくとも一度は接触するような点Bの移動パターンは $\boxed{(57)}\boxed{(58)}$ 通り，

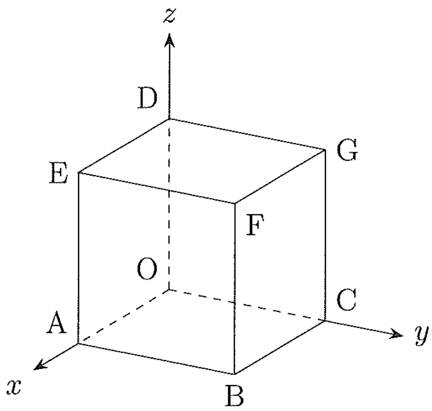
(d) 点Aが点 $(0,1)$ と点 $(1,1)$ を経由して点 $(2,1)$ に移動する場合，$t=3$ で初めて点Aと点Bが接触するような点Bの移動パターンは $\boxed{(59)}\boxed{(60)}$ 通り，$t=3$ より前に点Aと点Bが少なくと

も一度は接触するような点 B の移動パターンは $\boxed{(61)}\boxed{(62)}$ 通り

であるから，$P(3) = \dfrac{\boxed{(63)}\boxed{(64)}\boxed{(65)}}{\boxed{(66)}\boxed{(67)}\boxed{(68)}}$ である．

数学V

xyz 空間において，O$(0,0,0)$, A$(1,0,0)$, B$(1,1,0)$, C$(0,1,0)$, D$(0,0,1)$, E$(1,0,1)$, F$(1,1,1)$, G$(0,1,1)$ を頂点とする立方体 OABC–DEFG が存在する．



いま，球面が原点 O を通る球 S が，立方体 OABC–DEFG のいくつかの辺と接している．以下のそれぞれの場合について，球 S の半径と中心の座標を求めなさい．

(1) 3 つの辺 BF, EF, FG と接する場合

半径: $\boxed{(69)}\sqrt{\boxed{(70)}}-\boxed{(71)}\sqrt{\boxed{(72)}}$　中心: $\left(\sqrt{\boxed{(73)}}-\boxed{(74)},\ \sqrt{\boxed{(75)}}-\boxed{(76)},\ \sqrt{\boxed{(77)}}-\boxed{(78)}\right)$

(2) 6 つの辺 AB, AE, BC, CG, DE, DG と接する場合

半径: $\sqrt{\boxed{(79)}}-\sqrt{\boxed{(80)}}$　中心: $\left(\sqrt{\boxed{(81)}}-\boxed{(82)},\ \sqrt{\boxed{(83)}}-\boxed{(84)},\ \sqrt{\boxed{(85)}}-\boxed{(86)}\right)$

(3) 4 つの辺 AB, BC, EF, FG と接する場合

半径: $\dfrac{\sqrt{\boxed{(87)}\boxed{(88)}-\boxed{(89)}\boxed{(90)}\sqrt{\boxed{(91)}\boxed{(92)}}}}{\boxed{(93)}\boxed{(94)}}$　中心: $\left(\sqrt{\boxed{(95)}}-\boxed{(96)},\ \sqrt{\boxed{(97)}}-\boxed{(98)},\ \dfrac{\boxed{(99)}}{\boxed{(100)}}\right)$

(4) 4 つの辺 DE, EF, FG, DG と接する場合

半径: $\dfrac{\sqrt{\boxed{(101)}\boxed{(102)}}}{\boxed{(103)}\boxed{(104)}}$　中心: $\left(\dfrac{\boxed{(105)}}{\boxed{(106)}},\ \dfrac{\boxed{(107)}}{\boxed{(108)}},\ \dfrac{\boxed{(109)}}{\boxed{(110)}}\right)$

数学VI

いま，A 国の部品会社 A 社から B 国のメーカー B 社が一定量の部品の取引を行うために，その取引価格 p を交渉している．A 社の生産コスト c は事前の投資額 x に依存し，$c = \frac{1}{8}x^2 - 10x + 220$ が成り立っているものとすると，A 社の利益は $p - c - x$ とあらわすことができる．一方，B 社はこの部品を使用し生産を行うことで 308 の売上を得ることができるものとすると，A 社から部品を輸入する際に 10% の関税が課せられるため，B 社の利益は $308 - \frac{11}{10}p$ とあらわすことができる．

ところで，交渉は常に成立するわけではなく決裂することもあるから，A 社および B 社は共に決裂した場合のことを考慮しながら互いに交渉しなければならない．そこで，交渉が成立したときの A 社 (B 社) の利益から，交渉が決裂したときの A 社 (B 社) の利益 (負の場合は損失を意味する) を引いた値を，A 社 (B 社) の純利益と呼び，A 社の純利益と B 社の純利益の積を最大化するように p の値が定まるものとする．また，A 社は，以上のことをふまえて，自らの利益 $p - c - x$ を最大化するような x の大きさの投資を，事前に行っておくものとする．

次に，交渉が決裂した場合の 2 つのシナリオについて考える．

(1) 交渉が決裂したとき，A 社は生産を行わず生産コスト c はかからないが，事前の投資額 x の分だけ損失を被るので，A 社の利益は $-x$ となり，B 社は B 国内の他の部品会社から，価格 220 で同量の同じ部品を調達できるとすると，(この場合は関税がかからないことから) B 社の利益は $308 - 220 = 88$ となる．この場合の投資額 x は $\boxed{(111)}\boxed{(112)}$ となり，価格 p は $\boxed{(113)}\boxed{(114)}\boxed{(115)}$ となる．

(2) 交渉が決裂したとき，A 社は国内の他のメーカーに価格 250 で部品を販売できるとすると，A 社の利益は $250 - c - x$ となり，B 社は生産が行えなくなるとすると，B 社の利益は 0 となる．この場合の投資額 x は $\boxed{(116)}\boxed{(117)}$ となり，価格 p は $\boxed{(118)}\boxed{(119)}\boxed{(120)}$ となる．

最後に，交渉が成立した場合の「(2) の A 社の利益」−「(1) の A 社の利益」$= \boxed{(121)}\boxed{(122)}\boxed{(123)}$ である．